ЛЕКЦИЯ 10

ПОТЕНЦИАЛ ПЕРЕНОСА. УРАВНЕНИЕ ФУРЬЕ-КИРХГОФА
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ТЕПЛООБМЕНЕ

Потенциал переноса

Рассмотрим газовую или жидкую сплошную среду. Примем: все точки среды находятся в неравновесном состоянии. Это приводит к возникновению полей концентраций, температур, давлений, а наличие градиентов этих параметров вызывает перенос массы и энергии.

Выделим элемент объема движущейся жидкости в неоднородном поле некоторого потенциала переноса. Под потенциалом переноса φ понимают удельную массу или энергию (отнесённую к единице объёма). $\varphi\ (x,\ y,\ z)$ - скалярная величина.

Из курса математики известно, что скалярная функция φ называется потенциалом векторной функции $\vec{q}$, если между ними существует связь в форме:

$$\vec{q} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \qquad (10.1)$$

Под градиентом скалярной функции $grad\varphi$ подразумевают векторную функцию:

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \qquad (10.2)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – базисные векторы или орты.

В дальнейшем будем понимать связь между q и φ как пропорциональность

$$\vec{q} \approx -grad\varphi \approx -\nabla\varphi \qquad (10.2')$$

Таким образом, поток переносимой субстанции (массы или энергии) является векторной величиной $\vec{q}$.

В случае переноса массы под потенциалом переноса φ обычно понимают концентрацию компонента в смеси:

$$\varphi = \frac{m_i}{V} = \rho_i \qquad (10.3)$$

где m_i – масса i-го компонента в объёме V, кг i;

ρ_i – концентрация i-го компонента в смеси, кг i/м^3.

При переносе энергии в качестве потенциала переноса φ рассматривают энтальпию единицы объема среды:

$$\varphi = \frac{\rho V c_P T}{V} = c_P \rho T \tag{10.4}$$

Здесь: c_p– изобарная теплоёмкость среды , $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$;

T – температура, К;

ρ - плотность, кг/м^3;

V – объем, м^3

$$[\rho V c_P T] = [\text{Дж}] \qquad [c_P \rho T] = \left[\text{Дж}/\text{м}^3 \right]$$

В рассматриваемой среде могут существовать, так называемые, объемные (непрерывно распределённые по объёму) источники или стоки массы и энергии. В химической технологии под ними подразумеваются химические превращения.

Известно, что процессы тепло- и массообмена осуществляются двумя основными механизмами: молекулярным и конвективным. Молекулярный перенос (диффузия, теплопроводность) возникает в результате стремления системы к термодинамическому равновесию, а конвективный вызывается наличием поля скоростей в жидком или газовом объёме V.

Следует отметить, что в случае переноса энергии в форме теплоты существует ещё и радиантный перенос (тепловое излучение), вклад которого учитывают при достаточно высоких температурах.

Молекулярный перенос является определяющим в неподвижных средах, хотя он вызывает естественную конвекцию и практически всегда ею сопровождается.

Процессы молекулярного переноса массы и энергии описываются соответствующими феноменологическими уравнениями, являющимися, как правило, линейными градиентными законами.

Молекулярный перенос массы (молекулярная диффузия) подчиняется первому закону Фика:

$$\vec{q}_{Mm} = -D\, grad\, \rho_i \tag{10.5}$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$;

$\vec{q}_{Mm}$ - плотность массового потока, кг i /м^{2}с.

Молекулярный перенос энергии в форме теплоты описывается законом Фурье:

$$\vec{q}_{MT} = -\lambda_T\, grad T \tag{10.6}$$

где λ_T – коэффициент теплопроводности, Вт/ м ·К;

$\vec{q}_{MT}$ - плотность теплового потока, Дж /с м^2 = Вт/ м^2

В более общей форме закон Фурье можно переписать следующим образом:

$$\vec{q}_{MT} = -\lambda_T \; grad\frac{c_P \cdot \rho \cdot T}{c_P \cdot \rho} = -\frac{\lambda_T}{c_P \cdot \rho}\, grad(c_P \cdot \rho \cdot T) = -a\, grad(c_P\, \rho T) \qquad (10.7)$$

Здесь $a = \dfrac{\lambda_T}{c_P \cdot \rho}$ – коэффициент температуропроводности, м^2/с.

Следует обратить внимание, что коэффициенты диффузии D и температуропроводности a имеют одинаковую размерность (м^2/с) и называются молекулярными коэффициентами переноса.

Таким образом, молекулярный перенос массы и энергии описываются одинаковыми по форме законами, и они могут быть обобщены следующим выражением:

$$\vec{q}_M = -k\, grad\varphi \qquad (10.8)$$

При конвективном переносе масса и энергия транспортируются макроскопическим путём, движущейся со скоростью $\vec{v}$ средой. Плотность конвективного потока массы и энергии на каждом участке поверхности ΔA можно выразить следующим образом:

$$\vec{q}_K = \frac{\vec{v}\,\Delta A\;\varphi}{\Delta A} = \vec{v}\;\;\varphi \qquad (10.9)$$

где ΔA – участок поверхности, ориентированный перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$.

Размерность q – $[\text{кг}\; i/(\text{м}^2 \cdot \text{с})]$; $[\text{Дж}/(\text{м}\cdot^2 \text{с})]$ – плотность потока массы или энергии, соответственно.

$$\vec{q}_{KT} = \vec{v}\;(c_P\, \rho T) \qquad (10.10)$$

Таким образом, в случае молекулярного и конвективного переноса общая плотность потока массы или энергии складывается из двух векторных величин:

$$\vec{q} = \vec{q}_M + \vec{q}_K \qquad (10.11)$$

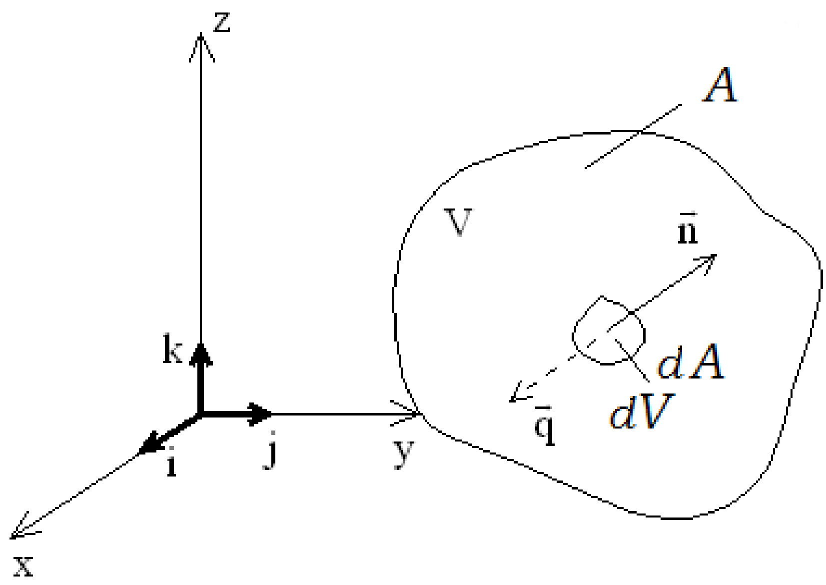

Рис.10.1. К выводу балансовых уравнений переноса

В газовой или жидкой среде, находящейся в движении, выделим произвольный объём V, ограниченный поверхностью A (рис. 10.1). На поверхности A выделим элемент поверхности dA и представим его в векторной форме, умножив на единичный вектор $\vec{n}$, нормальный к этому элементу и направленный из объёма, $\vec{n}dA = d\vec{A}$.

Составим балансовое уравнение по типу:

Накопление внутри объёма = Вход – Выход + Образование

Примем, что в произвольном объеме нет источников субстанции или стоков, т.е. образование равно нулю.

Плотность потока субстанции через элементарную площадку $d\vec{A}$ будет $-\vec{q}d\vec{A}$

Знак “–“ в этом произведении делает входящие потоки положительными, а выходящие – отрицательными.

Результирующий поток массы или энергии (*Вход минус Выход*) будет получен суммированием всех потоков через замкнутую поверхность А:

$$-\iint\limits_{A} \vec{q}\, d\vec{A} \qquad (10.12)$$

Таким образом, физически этот интеграл представляет разницу между входящими и выходящими потоками субстанции через всю поверхность A.

Если в объёме V происходит накопление субстанции, то это вызовет изменение потенциала переноса во времени $\frac{d\varphi}{dt}$, которое для элементарного объёма dV можно представить как $\frac{d\varphi}{dt}dV$, а для всего объема V как интеграл:

$$M = \iiint\limits_{V} \frac{d\varphi}{dt} dV \qquad (10.13)$$

Приравняв выражения (10.12) и (10.13), получим:

$$-\iint\limits_{A} \vec{q}\, d\vec{A} = \iiint\limits_{V} \frac{d\varphi}{dt} dV \qquad (10.14)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса, дающей преобразование интеграла, взятого по объёму V, ограниченному поверхностью A, в интеграл, взятый по этой поверхности, будем иметь:

$$\iint\limits_{A} \vec{q}\, d\vec{A} = \iiint\limits_{V} div\, \vec{q}\; dV \qquad (10.15)$$

С учётом (10.15) соотношение (10.14) примет вид:

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\, \vec{q} \right) dV \qquad (10.16)$$

Интеграл, взятый по произвольному объёму, может быть равен нулю только в случае равенства нулю подынтегральной функции:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\, \vec{q} = 0 \qquad (10.17)$$

Полученное выражение (10.17) и есть основное дифференциальное уравнение переноса субстанции – массы или энергии, как будет показано далее. В случае изотропных сплошных сред с его помощью можно получать поля температур или концентраций в однофазной среде. Искомой величиной является плотность потока субстанции $\vec{q}$, которая определяет удельный поток массы или энергии.

Дифференциальное уравнение конвективного теплообмена
(Уравнение Фурье-Кирхгофа)

Дифференциальное уравнение конвективного теплообмена является частным случаем уравнения переноса энергии в форме теплоты в однофазной сплошной изотропной среде. При этом теплоёмкость c_P, теплопроводность λ_T и плотность среды ρ считаются постоянными; отсутствует также перенос энергии в форме теплового излучения и объёмное источники (стоки) теплоты.

Как было отмечено выше, потенциалом переноса теплоты является энтальпия единицы объёма среды (ур. 10.4):

$$\varphi = \rho\, c_P T \tag{10.4}$$

Тогда с учётом выражений (10.7) и (10.9), будем иметь:

$$\vec{q}_T = \vec{q}_{MT} + \vec{q}_{KT} = -a\, grad(\rho\, c_P T) + (\rho\, c_P T)\vec{v} \tag{10.18}$$

Где $\vec{q}_T$ – плотность потока теплоты, представляющая векторную сумму молекулярной $\vec{q}_{MT}$ и конвективной $\vec{q}_{KT}$ компонент.

Основное уравнение переноса субстанции (10.17) в этом случае примет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho\, c_P T)}{\partial t} + div\left(-a\, grad(\rho\, c_P T) + (\rho\, c_P T)\vec{v}\right) = 0 \tag{10.19}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + div\left(-a\, grad\, T + T\,\vec{v}\right) = 0 \tag{10.20}$$

При a = const получим:

$$div\left(-a\, grad\, T\right) = -a\nabla^2 T \tag{10.21}$$

∇^2 - оператор Лапласа.

Дифференциальная операция $div(grad\ \varphi)$ сопоставляет скалярную функцию φ и скалярную функцию

$$div\, grad\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi \tag{10.22}$$

Примем также, что гидродинамически среда является стационарной, тогда с учётом $\rho = const$ уравнение неразрывности имеет вид:

$$div\,\vec{v} = 0 \tag{10.23}$$

Дивергенцию от $T\vec{v}$, как произведения векторной и скалярной величины, можно представить в виде:

$$div\left(T\vec{v}\right) = T\,div\vec{v} + \vec{v}\,grad T \qquad (10.24)$$

С учётом (10.21), (10.23) и (10.24) выражение (10.20) примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\,grad\,T = a\nabla^2 T \qquad (10.25)$$

Полученное выражение (10.25) называется *<u>дифференциальным уравнением конвективного теплообмена или уравнением Фурье-Кирхгофа</u>*. Оно является частным случаем дифференциального баланса энергии в форме теплоты в движущейся среде, где имеет место перенос энергии теплопроводностью.

Полная форма уравнения конвективного теплообмена в скалярном виде будет:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (10.26)$$

Левая часть этого соотношения представляет собой субстанциональную производную: $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}$

Решением дифференциального уравнения конвективного теплообмена в общем виде является функция $T(x,y,z,t)$, которая представляет собой нестационарное поле температур в движущейся среде.

В неподвижной среде $\vec{v} = 0$ и выражение (10.25) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T \qquad (10.27)$$

Уравнение (10.27) описывает нестационарное температурное поле в неподвижной среде, может применяться также для твёрдых тел и называется уравнением *<u>нестационарной теплопроводности</u>*.

Уравнение для установившегося процесса в неподвижной среде или в твердом теле имеет вид:

$$\nabla^2 T = 0 \qquad (10.28)$$

Отметим, что согласно уравнению (10.27), локальное изменение температуры $\frac{\partial T}{\partial t}$ пропорционально коэффициенту температуропроводности a, который, таким образом, характеризует теплоинерционные свойства среды. При прочих равных условиях быстрее нагреется или охладится то тело, которое имеет бóльший коэффициент температуропроводности.

Граничное условие

Уравнения Фурье-Кирхгофа на практике используется совместно с граничным условием, т.е. условием на границе среды у неподвижной твердой стенки. Вблизи твердой стенки теплота передается только теплопроводностью внутри пограничного слоя. Следовательно, по закону Фурье:

$$\dot{Q} = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} dA = -\lambda_T \, gradT \, dA \tag{10.29}$$

В тоже время, количество теплоты, передаваемой из ядра потока к твердой стенке, можно выразить законом Ньютона (уравнение теплоотдачи):

$$\dot{Q} = \alpha\left(T - T_{cm}\right) dA \tag{10.30}$$

Если перенос тепла стационарный, это один и тот же тепловой поток:

$$\dot{Q} = -\lambda_T \, gradT \, dA = \alpha\left(T - T_{cm}\right) dA$$

$$-\lambda_T \, gradT = \alpha\left(T - T_{cm}\right) \tag{10.31}$$

Это и будет граничным условием, дополняющим уравнение Фурье-Кирхгофа.

Элементы теории подобия в теплообмене

Рассмотрим гидродинамически одномерный поток жидкости. Запишем уравнение Фурье-Кирхгофа:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \nabla^2 T \tag{10.32}$$

Получим приближенное решение этого уравнения методами теории подобия.

Для этого зададим константы подобия, выражающие отношения величин, входящих в уравнение Фурье-Кирхгофа: a_l, a_t, a_T, a_a, a_υ.

Умножим каждый из элементов дифференциального уравнения (10.32) на соответствующую константу подобия, причем последняя как постоянная величина, выносится за знак дифференциала.

$$\frac{a_T}{a_t} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{a_\upsilon a_T}{a_l}\left(\upsilon_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{a_a a_T}{a_l^2} \cdot a \nabla^2 T \tag{10.33}$$

Для сохранения тождественности полученного и исходного уравнений необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{a_T}{a_t} = \frac{a_v a_T}{a_l} = \frac{a_a a_T}{a_l^2} \qquad (10.34)$$

Разделим поочередно дроби на правую дробь. Отношения будут равны единице, т.к. они все являются индикаторами подобия, а у подобных явлений индикаторы равны единице.После деления заменим константы подобия их значениями: $a_l = l_1/l_2$, $a_t = t_1/t_2$, $a_a = a_1/a_2$, $a_T = T_1/T_2$.

Первый комплекс при делении $\frac{a_T}{a_t} / \frac{a_a a_T}{a_l^2} = 1$

$$Fo = \frac{t\,a}{l^2} \qquad (10.35)$$

Критерий Фурье ***Fo*** является мерой отношения между количеством теплоты, вызывающей изменение температуры в данной точке движущейся среды и количеством теплоты, передаваемой данной движущейся среде теплопроводностью.

Равенство критериев *Fo* в сходственных точках подобных систем - необходимое условие подобия нестационарных процессов. Критерий *Fo* - аналог критерия *Ho* в гидродинамике.

Второй комплекс при делении $\frac{a_v a_T}{a_l} / \frac{a_a a_T}{a_l^2} = 1$

$$Pe = \frac{\upsilon l}{a} \qquad (10.36)$$

Критерий Пекле ***Pe*** характеризует отношение количества теплоты, передаваемой конвекцией, к количеству теплоты, передаваемой теплопроводностью.

Критерий *Pe* можно представить так:

$$Pe = \frac{\upsilon l}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} = Re\,Pr$$

где: $Pr = \frac{\nu}{a}$ (10.37)

Критерий Прандтля ***Pr*** - мера соотношения между толщиной гидродинамического пограничного слоя $\delta_{гидр}$ и толщиной теплового пограничного слоя $\delta_{тепл}$.

Критерий Прандтля *Pr* составлен только из физических параметров.

В газах при *Pr* = 1 поля температур и скоростей подобны, толщины теплового и гидродинамического слоев соизмеримы по масштабу $\delta_{тепл} \approx \delta_{гидр}$.

При *Pr* = 0,7÷1, толщины теплового и гидродинамического слоев практически равны по величине. Здесь *Pr* мало зависит от температуры и давления.

В жидкостях Pr = 3÷300. Поэтому в капельных жидкостях толщина теплового слоя $\delta_{тепл}$ меньше толщины гидродинамического $\delta_{гидр}$ слоя, $\delta_{тепл} < \delta_{гидр}$. В жидкостях Pr сильно зависит от температуры, это объясняется значительной зависимостью от температуры коэффициента динамической вязкости.

Если с граничными условиями к уравнению Фурье-Кирхгофа (10.31) проделать подобные преобразования, получим:

$$a_\alpha a_T(\alpha(T - T_{cm})) = \frac{a_{\lambda_T} a_T}{a_l} \lambda_T gradT$$

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda_T} \qquad (10.38)$$

Критерий Нуссельта ***Nu*** характеризует соотношение между количеством теплоты, переносимой совместно конвекцией и теплопроводностью, к количеству теплоты передаваемой только теплопроводностью, и характеризует подобие процесса переноса тепла вблизи границы раздела фаз или у стенки.

Необходимым условием подобия процессов теплопереноса являются соблюдения гидродинамического, геометрического и теплового подобия.

Поэтому критериальное уравнение конвективного теплообмена будет представлено функцией вида:

$$f\,(Fo, Nu, Pe, Ho, Re, Fr, Г_1, Г_2...) = 0 \qquad (10.39)$$

С учетом того, что определяемым критерием здесь является критерий Нуссельта Nu, т.к. в него входит искомая величина - коэффициент теплоотдачи α, уравнение следует записать так:

$$Nu = f\,(Fo, Pe, Ho, Re, Fr, Г_1, Г_2...)\,.$$

Вместо критерия Пекле Pe в ряде уравнений используется критерий Прандтля Pr:

$$Nu = f\,(Fo, Pr, Ho, Re, Fr, Г_1, Г_2...)$$

При расчете естественной конвекции критерий Фруда Fr, отражающий влияние силы тяжести на теплоперенос, обязательно должен быть учтен. В случае вынужденной конвекции влияние силы тяжести на процесс переноса теплоты незначительно, им можно пренебречь и исключить из критериального уравнения.

В критерий Фруда Fr входит скорость - параметр трудноопределимый при естественной конвекции, поэтому для исключения скорости вместо него используются другие критерии - Архимеда Ar или Грасгофа Gr.

Критерий Архимеда Ar:

$$Ar = \frac{gl^3}{\nu^2}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \qquad (10.40)$$

Зависимость плотности от температуры можно записать как:

$$\rho_2 = \rho_1[1 - \beta\,(T_2 - T_1)] \qquad (10.41)$$

где β - коэффициент объемного расширения (1/град).

Отсюда $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \beta(T_2 - T_1) = \beta\Delta T$ (10.42)

Критерий Грасгофа Gr:

$$Gr = \frac{gl^3}{\nu^2}\beta\Delta T \qquad (10.43)$$

Gr - критерий Грасгофа равен отношению подъемной силы, определяемой разностью плотностей в разных точках потока ρ_2 и ρ_1, к силе внутреннего трения в неизотермической движущейся среде.

В большинстве случаев ΔT в критерии Грасгофа определяют как положительную разницу температур между ядром потока и стенкой.

Поэтому, в условиях свободной конвекции стационарного процесса переноса теплоты, критериальное уравнение может быть записано так:

$$Nu = f(Gr, Pr, \Gamma_1, \Gamma_2 ...) \qquad (10.44)$$

Основным видом критериальных зависимостей, применяемых в инженерных расчетах, является степенная функция вида:

$$Nu = ARe^m Pr^n Gr^p \Gamma^q . \qquad (10.45)$$

Коэффициенты: A, m, n, p, q получают, проводя экспериментальные исследования в определенных границах изменения параметров для определенной группы подобных явлений. Полученная зависимость применяется в инженерных расчетах для получения коэффициентов теплоотдачи α в указанном диапазоне величин.