ЛЕКЦИЯ 4
МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО МАСООБМЕНА
КРИТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО МАСООБМЕНА

Полученное дифференциальное уравнение конвективной диффузии (3.13) описывает в общем виде распределение концентраций в движущейся жидкости.

Его решением в общем виде являлась бы функция $C(x, y, z, \tau)$, которая представляет *нестационарное поле концентраций компонента* в движущейся среде. Но в большинстве случаев осуществления массообменных процессов ввиду их сложности получить такие функции решением уравнения конвективной диффузии невозможно. Многие процессы настолько сложны, что удается только дать математическую формулировку задачи и поставить условия однозначности. Полученные же дифференциальные уравнения часто не решаются известными в математике методами. Иногда даже не удается составить систему дифференциальных уравнений, полностью описывающих процесс. Решением исходных дифференциальных уравнений в таких случаях являются обобщенные уравнения, полученные с применением теории подобия и основанные на экспериментальном материале. Эти уравнения затем используются в инженерной практике.

Поэтому для нахождения расчетных зависимостей, позволяющих осуществлять технологические расчеты массообменных процессов и аппаратов для их проведения используют методы теории подобия.

Согласно основным принципам теории подобия, изложенным в первой части курса, осуществим соответствующие преобразования исходного уравнения конвективной диффузии. Запишем его для одномерного потока

$$\partial C / \partial t + \upsilon_x (\partial C / \partial x) = D(\partial^2 C / \partial x^2) \qquad 4.1$$

Получим приближенное решение этого уравнения методами теории подобия.

Для этого:

Зададим константы подобия, выражающие отношения величин, входящих в исходное дифференциальное уравнение: a_c, a_t, a_v, a_l, a_D,

Каждый из элементов исходного дифференциального уравнения (4.1) умножается на соответствующие константы подобия, причем последние как постоянные величины, выносятся за знак дифференциала.

$$\frac{a_C}{a_t}\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{a_\upsilon a_C}{a_l}\upsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{a_D a_C}{a_l^2} D(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}) \qquad 4.2$$

Для сохранения тождественности полученного и исходного уравнений приравниваем коэффициенты, стоящие при одинаковых слагаемых исходных и преобразованных уравнений:

$$\frac{a_C}{a_t} = \frac{a_\upsilon a_C}{a_l} = \frac{a_D a_C}{a_l^2} = 1 \qquad 4.3$$

Разделим поочередно первую и вторую дроби на третью. Отношения будут равны единице, т.к. они все являются индикаторами подобия, а у подобных явлений индикаторы равны единице.

В результате деления первой дроби на третью получим:

$$\frac{a_c}{a_t} / \frac{a_D a_C}{a_l^2} = 1 = \frac{a_l^2}{a_D a_t} \qquad 4.4$$

Заменим константы подобия на отношения соответствующих величин: $a_l = l_1/l_2$, $a_t = t_1/t_2$, $a_v = v_1/ v_2$, $a_c = C_1/ C_2$, и т.д.

(Индексы 1и 2 относятся к двум сходственным точкам натуры и модели):

$$\frac{l_1^2}{t_1 D_1} = \frac{l_2^2}{t_2 D_2} \qquad 4.5$$

Обозначим комплекс

$$\frac{l^2}{\tau D} = Fo' \qquad 4.6$$

Fo' - диффузионный критерий Фурье. Абсолютные значения Fo' очень велики, поэтому для удобства его заменяют обратной величиной

$Fo' = \dfrac{\tau D}{l^2}$ Критерий Фурье характеризует условие неустановившегося процесса переноса, показывает постоянство отношений изменений концентрации во времени к изменению концентрации за счет молекулярной диффузии в сходственных точках подобных систем.

В результате деления второй дроби на первую получим:

$$\frac{a_\upsilon a_C}{a_l} / \frac{a_D a_C}{a_l^2} = 1 = \frac{a_\upsilon a_l}{a_D} \qquad 4.7$$

$$\frac{\upsilon_1 l_1}{D_1} = \frac{\upsilon_2 l_2}{D_2} = Pe' \qquad 4.8$$

Pe' - диффузионный критерий Пекле. Показывает постоянство соотношения массы вещества, передаваемого за счет конвекции к массе вещества, передаваемого за счет молекулярной диффузии в сходственных точках подобных систем.

$$Pr' = \frac{Pe'}{Re} = \frac{\upsilon l \nu}{D \upsilon l} = \frac{\nu}{D} \qquad 4.9$$

Pr' - диффузионный критерий Прандтля. Он составлен из величин, отражающих физические свойства жидкости. Характеризует подобие физических свойств фаз в процессах конвективного массообмена. Критерий Прандтля является мерой подобия полей концентраций и скоростей. Поскольку вязкость (ν) определяет, при прочих равных условиях, профиль скоростей в потоке (в вязком подслое), а коэффициент диффузии D- профиль концентрации (в диффузионном подслое).

В иностранной литературе Pr' обозначают как Sc (критерий Шмидта)

Для газов $Pr \cong 1$, значит $\nu \cong D$ и, следовательно, $\delta_{дифф} \approx \delta_{вязкого\ подслоя}$

Для жидкостей $Pr \sim 1000$, следовательно, $\delta_{\text{вязкого подслоя}} >> \delta_{\text{дифф подслоя}}$

Для полного математического описания процесса переноса вещества уравнение конвективной диффузии должно быть дополнено граничными условиями.

Запишем уравнение массоотдачи для случая переноса массы вещества в единицу времени через единицу поверхности из ядра потока к границе раздела фаз, используя объемную концентрацию компонента C $\left[\frac{кмоль}{м^3}\right]$:

$$dJ = \beta(C - C_{гр})dAdt = \beta \Delta C dAdt \qquad 4.10$$

Вблизи границы раздела фаз скорость переноса вещества определяется скоростью молекулярной диффузии:

$$dJ = -D(\partial C / \partial n)dAdt \qquad 4.11$$

приравнивая (4.10) и (4.11) получим

$$\beta \Delta C = -D(\partial C / \partial n) \qquad 4.12$$

Это уравнение характеризует условие на границе раздела фаз.

Чтобы определить коэффициент массоотдачи β необходимо совместное решение уравнений конвективной диффузии, Навье-Стокса и неразрывности потока при заданных начальных и конечных граничных условиях, что практически сложно сделать.

Использование методов теории подобия позволяет сравнительно просто найти связь между переменными, характеризующими процесс массообмена в потоке фазы в виде критериального уравнения массоотдачи.

Подобие граничных условий можно установить, только допуская существование пограничного слоя, перенос в котором осуществляется лишь молекулярной диффузией.

Преобразуем уравнение (4.12) с помощью методов теории подобия аналогично тому, как это было сделано с уравнением (4.1)

$$(a_\beta a_C)\beta\Delta C = (\frac{a_D a_C}{a_l})\cdot(-D\frac{\partial C}{\partial x}) \qquad 4.13$$

$$\frac{a_\beta a_C a_l}{a_D a_C} = 1 = \frac{a_\beta a_l}{a_D} \qquad 4.14$$

$$\frac{\beta_1 l_1}{D_1} = \frac{\beta_2 l_2}{D_2} \qquad 4.15$$

Обозначим комплекс

$$\frac{\beta\, l}{D} = Nu' \qquad 4.16$$

Nu' - диффузионный критерий Нуссельта. Характеризует подобие процессов массообмена вблизи границы раздела фаз и показывает соотношение между потоком вещества, переносимым совместно конвекцией и диффузией в ядре потока и молекулярной диффузией в пограничном слое.

В иностранной литературе Nu' обозначают как Sh (критерий Шервуда)

$$\begin{aligned} M &= \beta F(C - C_{гр}) \\ M &= DF(C - C_{гр})/\delta_{эф} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{D}{\delta_{эф}} \qquad 4.17$$

$\delta_{эф}$-толщина диффузионного пограничного слоя, сопротивление которого молекулярной диффузии равно сопротивлению переносу, обусловленному в действительности конвективной диффузией.

$$Nu' = \frac{\beta\, l}{D} = \frac{Dl}{\delta_{эф} D} = \frac{l}{\delta_{эф}} \qquad 4.18$$

По порядку величину выражает отношение характерного геометрического линейного размера к толщине диффузионного пограничного слоя.

Необходимым условием подобия процессов массопередачи является соблюдение гидродинамического подобия. $\mathrm{Re} = idem, Fr = idem.$ Часто Fr бывает удобно заменить критерием Галилея $Ga = (gl^3/\nu^2)$ или Архимеда $Ar = (\frac{gl^3}{\nu^2}\cdot\frac{(\rho_0 - \rho}{\rho})$.

Также должно соблюдаться геометрическое подобие: $\Gamma = idem$.

Nu'- определяемый критерий, т.к. β - определяемая величина.

Итак, для неустановившегося процесса:

$$Nu' = f(Fo', Pe', \mathrm{Re}, Fr, \Gamma_1, \Gamma_2 ...) \qquad 4.19$$

Или

$$Nu' = f(Fo', Pe', \mathrm{Pr}', Ga, \Gamma_1, \Gamma_2 ...) \qquad 4.19а$$

Для установившегося процесса:

$$Nu' = f(Pe', \mathrm{Re}, Fr, \Gamma_1, \Gamma_2 ...) \qquad 4.20$$

Или

$$Nu' = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}', Ga, \Gamma_1, \Gamma_2 ...) \qquad 4.20а$$

Для вынужденного движения (влияние сил тяжести на процесс переноса массы мало):

$$Nu' = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}', \Gamma_1, \Gamma_2 ...) \qquad 4.21$$

$$\frac{\beta\, l}{D} = A\left(\frac{\upsilon d \rho}{\mu}\right)^m \left(\frac{\nu}{D}\right)^n (\Gamma_1)^p (\Gamma_2)^q \qquad 4.21а$$

A, m, n, p, q определяют из опытов.

Уравнения (4.19-4.21.) – критериальные уравнения конвективного массообмена.

Следует отметить, что конвективный массообмен описывается дифференциальным уравнениями аналогичным по строению с уравнениями конвективного теплообмена. Подобную аналогию можно провести между процессами переноса тепла, массы и энергии (количества движения).

$$\tau = P / F = -\rho \nu d\upsilon / dn$$
$$j = M / F = -DdC / dn$$
$$q = Q / F = -\lambda dt / dn$$
$$Pr = \nu / a$$
$$Pr' = \nu / D = \mu / (\rho D) \qquad 4.22$$

j -удельный поток массы.

q -удельный поток тепла.

Аналогия, проявляющаяся в этих основных уравнениях, а также анализ теории турбулентного движения в трубках приводит к выводу, что безразмерный критерий Стантона при критерии Прандтля равном 1 (т.е. при равенстве толщин гидродинамического, теплового и диффузионного подслоев – равенство $\upsilon = a = D$) можно выразить через коэффициент трения $\varepsilon_n(\lambda_т)$.

$$\frac{Nu'}{Pe'} = \frac{\beta l D}{D \upsilon l} = \frac{\beta}{\upsilon} = St' = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}') = A_1 \mathrm{Re}^{-m} \qquad 4.23$$

$$\frac{Nu}{Pe} = \frac{\alpha la}{\lambda \upsilon l} = \frac{\alpha l \lambda}{\lambda \upsilon l c \rho} = \frac{\alpha}{\upsilon c \rho} = St = f(\mathrm{Re}, P_2) = A_2 \mathrm{Re}^{-m} \qquad 4.24$$

$$\varepsilon_n(\lambda_т) = f(\mathrm{Re}) = A_3 \mathrm{Re}^{-m} = 0.3164 \mathrm{Re}^{-0.25} \qquad 4.25$$

$\varepsilon_n(\lambda_т)$ -коэффициент трения. При Pr=1 (для газов и паров)

$$St = St' = \varepsilon_n(\lambda_т)/8 \qquad 4.26$$

$$\alpha/(\upsilon c \rho) = \beta/\upsilon = \varepsilon_n(\lambda_т)/8, \beta = \alpha/c\rho \qquad 4.27$$

Эти выражения показывают количественную связь между $\varepsilon_n(\lambda_т), \beta$ и α обусловленную единым механизмом переноса количества движения, массы и тепла.

Аналогия этих процессов называется гидродинамической аналогией, по величине $\varepsilon_n(\lambda_т)$, которую нетрудно определить опытным путем или расчетом, находят α и β.

Расчет коэффициентов массоотдачи в аппаратах различных типов по уравнениям с безразмерными переменными

Коэффициенты массоотдачи для конкретных массообменных процессов, протекающих в соответствующих массообменных аппаратах, рассчитывают по критериальным уравнениям, полученным обработкой опытных данных. Для каждого типа массообменного аппарата получены соответствующие уравнения, которые приведены в специальной и учебной литературе.

Так, например, при проведении абсорбции в насадочных аппаратах, для регулярных насадок, к которым относится и хордовая, коэффициент массоотдачи в газовой фазе β_y находят из уравнения:

$$Nu_y' = 0{,}167 \mathrm{Re}_y^{0{,}74} \mathrm{Pr}_y'^{0{,}33} (l/d_э)^{-0{,}47} \qquad 4.28$$

где: $Nu' = \beta_y d_Э / D_y$ - диффузионный критерий Нуссельта для газовой фазы.

Отсюда β_y (в м/с) равен:

$$\beta_y = 0{,}167 \frac{D_y}{d_Э} \mathrm{Re}_y^{0{,}74} \mathrm{Pr}_y'^{0{,}33} (l/d_э)^{-0{,}47} \qquad 4.29$$

где: D_y - коэффициент диффузии поглощаемого компонента в газовой фазе, $м^2/с$;

$\mathrm{Re}_y = \upsilon d_Э \rho_y / \varepsilon \mu_y$ - критерий Рейнольдса для газовой фазы в насадке;

Характеристики насадки:

$d_Э = 4\varepsilon / a$ -эквивалентный диаметр; ε - свободный объем; a - удельная поверхность.

$Pr_y^{'} = \mu_y / \rho_y D$ - диффузионный критерий Прандтля для газовой фазы;

μ_y - вязкость газа, Па $*$ с

l -высота элемента насадки, м.

Для колонн с неупорядоченной насадкой коэффициент массоотдачи β_y можно находить из уравнений

$$Nu_y^{'} = 0,407 \operatorname{Re}_y^{0,655} \Pr_y^{'0,33} \qquad 4.30$$

Коэффициент массоотдачи в жидкой фазе β_x находят из обобщенного уравнения, пригодного как для регулярных (в том числе и хордовых), так и для неупорядоченных насадок

$$Nu_x^{'} = 0,0021 \operatorname{Re}_x^{0,75} \Pr_y^{'0,5} \qquad 4.31$$

где: $Nu_x = \dfrac{\beta_x \delta_{np}}{D_x}$ - диффузионный критерий Нуссельта для жидкой фазы.

Отсюда β_x (в м/с) равен:

$$\beta_x = 0,0021 \frac{D_x}{d_{np}} \operatorname{Re}_x^{0,75} \Pr_x^{'0,5} \qquad 4.32$$

где: D_x - коэффициент диффузии поглощаемого компонента в газовой фазе, $м^2 / с$

$\delta_{np} = (\mu_x^2 / \rho_x^2 g)^{1/3}$ - приведенная толщина стекающей пленки жидкости, м;

$\operatorname{Re}_x = 4U \rho_x / a \mu_x$ - модифицированный критерий Рейнольдса для стекающей по насадке пленки жидкости;

$Pr_x^{'} = \mu_x / \rho_x D_x$ - диффузионный критерий Прандтля для жидкости.