Математический минимум

Показательная функция $a^x > 0$ при $a > 0$

$a^0 = 1$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$a^{-y} = a^{0-y} = \dfrac{1}{a^y}$

$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

Чаще всего встречается экспонента $e^x = \exp(x)$ при

$a = e = 2{,}71828182846\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$

Логарифмы

Если число y есть логарифм числа x по основанию a

$$y = \log_a x$$

то $x = a^y = a^{\log_a x}$. Область допустимых значений аргумента $x > 0$.

Натуральный логарифм $\ln x$ (по основанию e): $\ln x = \log_e x$

Десятичный логарифм $\lg x$ (по основанию 10): $\lg x = \log_{10} x$

Свойства логарифма (на примере натурального):

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln 1 = 0$

$\ln \dfrac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = -\ln b = \ln(b^{-1})$

$\ln(a^b) = b \ln a$

$\ln e = 1, \qquad \lg 10 = 1$

$\ln(e^x) = x \ln e = x, \qquad e^{\ln x} = x$ по определению логарифма

$\ln(10) = 2{,}302585..$

Связь десятичного и натурального логарифмов числа x:

$\ln x = \ln(10) \cdot \lg(x) = 2{,}3026 \lg x$

Оператор суммы числового ряда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Оператор произведения числового ряда

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Факториал натурального числа N

$N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$

$0! = 1$ по определению

Приближение логарифма факториала больших чисел – формула Стирлинга:

$\ln N! \approx N \ln N - N$ при $N \gg 1$.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Два различных действительных корня x_1, x_2, если $D = b^2 - 4ac > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Два совпадающих действительных корня $x_1 = x_2$, если $D = b^2 - 4ac = 0$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Нет действительных корней, если $D = b^2 - 4ac < 0$.

Производная функции одной переменной

Производной $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ функции одной переменной $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Дифференцирование функции – определение её производной.

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

Производная функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 представляет собой мгновенную скорость изменения значений данной функции при равномерном изменении аргумента в окрестности этой точки.

Свойства производной и выражения производных некоторых элементарных функций ($a = const$):

$$\frac{d}{dx} af(x) = a \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$$

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\sin ax$$

Анализ первой производной функции одной переменной

Если в некоторой точке x_0 производная $f'(x)$ функции $f(x)$	то в этой точке функция $f(x)$
положительна $f'(x) > 0$	возрастает
отрицательна $f'(x) < 0$	убывает
равна нулю и меняет знак с плюса на минус	имеет максимум
равна нулю и меняет знак с минуса на плюс	имеет минимум

Вторая производная функции одной переменной – производная от первой производной:

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

Анализ второй производной функции одной переменной

Если в некоторой точке x_0 вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$	то в этой точке линия на графике значений функции $f(x)$
положительна $f''(x) > 0$	имеет положительную кривизну (вогнута к оси абсцисс)
отрицательна $f''(x) < 0$	имеет отрицательную кривизну (выпукла относительно оси абсцисс)
равна нулю и меняет знак	имеет точку перегиба
равна нулю в широком интервале значений	в этом интервале является прямой (не имеет кривизны)

Частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$

Геометрический образ такой функции – поверхность в координатах (x, y, z). Первой частной производной функции $z = f(x, y) = z(x, y)$ называется её производная по одной из переменных при постоянстве другой переменной. Например, если зафиксировать значение $y = y_0$, то функция $z(x, y)$ будет иметь свойства функции одной переменной $z_y = f(x)_{y=y_0}$. Графиком этой функции будет линия в сечении поверхности $z(x, y)$ плоскостью $y = y_0$. Тангенс угла наклона касательной к этой линии – частная производная:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=y_0} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{y=y_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

В общем случае частные производные функции двух переменных также являются функциями этих переменных.

Свойства частных производных функции $z(x, y)$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \qquad \text{(цепное правило)}$$

Вторые производные функции двух переменных

частные по переменной:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

смешанные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$$

Частные производные функции многих переменных $M = f(x, y, z, p, r, t)$ вычисляют при постоянстве значений всех переменных, кроме одной:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{y,z,p,r,t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0, z_0, p_0, r_0, t_0) - f(x, y_0, z_0, p_0, r_0, t_0)}{\Delta x}$$

Полный дифференциал функции двух переменных

Если функция $z(x, y)$ имеет полный дифференциал dz, то

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

причём вторые смешанные частные производные равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования, а зависит только от значений функции $z(x, y)$ в верхнем и нижнем пределах:

$$\int_{z(x_1,y_1)}^{z(x_2,y_2)} dz = z(x_2, y_2) - z(x_1, y_1)$$

Интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint dz = 0$$

Полные дифференциалы имеют термодинамические функции состояния внутренняя энергия U, энтальпия H, энтропия S, энергия Гиббса G, энергия Гельмгольца A. Свойства их, как функций состояния – следствие свойств полного дифференциала.

Интеграл

Если $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$. При этом любая функция вида $F(x) + C$ также является первообразной для $f(x)$, если $C = const$. Переход от данной функции к её первообразной называется интегрированием (обратное преобразование по отношению к дифференцированию), произвольная константа C называется постоянной интегрирования.

Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ по переменной x:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределённого интеграла ($a = const, f(x)$ и $g(x)$ – функции переменной x):

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

Метод интегрирования по частям:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx$$ или

$$\int f dg = f \cdot g - \int g df$$

Интегрирование путём замены переменной

Если в подынтегральном выражении все вхождения переменной x представляют собой некоторое выражение $z = g(x)$, то при интегрировании можно выполнить замену переменной x на переменную z:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int f(z)dz$$

Основные неопределённые интегралы:

$$\int 0dx = C$$

$$\int 1dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \text{при } a \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \text{при } a > 0, \qquad a \neq 1$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} + C$$

Определённым интегралом от функции $f(x)$ по переменной x в пределах от a (нижний предел) до b (верхний предел) называется разность значений первообразной функции $F(x)$ в точках $x = b$ и $x = a$ (формула Ньютона – Лейбница):

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Геометрический смысл – площадь криволинейной трапеции, заключённой между нулевой осью абсцисс x и линией графика функции, и ограниченной слева и справа вертикалями, проходящими соответственно через точки $x = a$ и $x = b$.

Интегральное среднее значение $\ddot{z}$ функции $z = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\ddot{z} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Интегральное среднее считается постоянным на отрезке $[a, b]$, его удобно использовать для вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \ddot{z} \cdot (b - a)$$

Интеграл с переменным верхним пределом является (интегральной) функцией верхнего предела $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

При определённом интегрировании путём замены переменной x на переменную $z = g(x)$ соответственно заменяют и пределы интегрирования:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\big(g(x)\big) \cdot dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Приближенное представление функций путём их разложения в степенные ряды

Если функция $f(x)$ и её производные непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x = x_0$, то существует приближённое представление значения функции $f(x)$ в данной окрестности в виде степенного ряда Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Сумма первых двух членов этого ряда $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной к линии на графике функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Если функция $f(x)$, разлагаемая в ряд Тейлора, и её производные определены в точке $x = 0$, то ряд Тейлора в окрестности этой точки называется рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Примеры разложения функций в степенные ряды в окрестности $x = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots$$

Интегрирование простейших дифференциальных уравнений путём разделения переменных

Если некоторое дифференциальное уравнение можно свести к виду

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x)$$

то возможно его интегрирование путём разделения переменных:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

$$\int_{y(a)}^{y(b)} g(y)dy = \int_a^b f(x)dx$$

Раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов

Если некоторая функция переменной x имеет вид $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, причём в точке $x = a$ значения функций $p(a) = 0$ и $q(a) = 0$, то говорят, что при вычислении предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ имеет место неопределённость вида «0/0».

Если функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, то согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{p'(x)}{q'(x)}$$

Если однократное дифференцирование числителя и знаменателя не избавляет от неопределённости (т.е. $p'(a) = 0$ и $q'(a) = 0$), то правило Лопиталя можно применить повторно требуемое число раз.