ЛЕКЦИЯ 2
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнения Навье-Стокса

В потоке реальной жидкости будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения.

Рассмотрим сначала идеализированный случай однонаправленного движения несжимаемой вязкой жидкости, в котором все векторы скорости имеют одинаковые направления.

Выделим в потоке жидкости двигающейся параллельно оси z элементарный параллелепипед, грани которого ориентированы по осям координат (Рис.2.1).

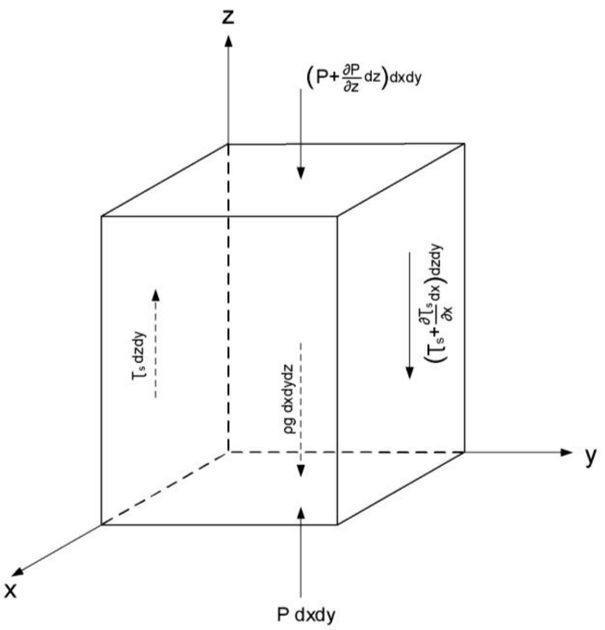

Рис.2.1. К выводу уравнения баланса сил при одномерном движении вязкой несжимаемой жидкости

Будем считать, что вектор скорости υ_z уменьшается вдоль осей x и y . С учетом условия однонаправленности имеем

$\upsilon_x = \upsilon_y = 0$

Определим проекции внешних сил на ось z, действующих на элементарный объём.

Сила давления: $Pdxdy-\left(P+\dfrac{\partial P}{\partial z}dz\right)dxdy=-\dfrac{\partial P}{\partial z}dxdydz$

Сила тяжести: $-\rho g dxdydz$

Сила трения, возникающая при изменении вектора скорости по оси x:

$$\tau_S dzdy - \left(\tau_S + \frac{\partial \tau_S}{\partial x} dx\right) dzdy = -\frac{\partial \tau_S}{\partial x} dxdydz$$

Сила трения при изменении вектора скорости по оси y

$$\tau_S dzdx - \left(\tau_S + \frac{\partial \tau_S}{\partial y} dy\right) dzdx = -\frac{\partial \tau_S}{\partial y} dydzdx$$

При равенстве скоростей υ_x и υ_y нулю касательные напряжения, действующие по оси z, при изменении скорости υ_z по осям x и y выражаются по закону внутреннего трения Ньютона.

При изменении υ_z по оси x:

$$\tau_S = \tau_{xz} = -\mu \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}$$

При изменении υ_z по оси y:

$$\tau_S = \tau_{yz} = -\mu \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}$$

Следовательно, проекция сил трения на ось z равна

$$\mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2}\right) dxdydz$$

Из уравнения неразрывности при $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$ следует $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0$, поэтому величина ускорения равна $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}$ (индивидуальная производная равна частной).

В соответствии с основным принципом динамики получим уравнение баланса сил, действующих по оси z

$$\rho \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial z} dxdydz - \rho g dxdydz + \mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2}\right) dxdydz \qquad (2.1)$$

Сократив на величину элементарного объёма $dV = dxdydz$, получим уравнение баланса сил, отнесённых к единице объёма

$$\rho \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \mu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2}\right) \qquad (2.2)$$

Полученное уравнение выражает одновременно как баланс сил, так и баланс количества движения (импульса), так как левая часть уравнения (2.2) (произведение ускорения на массу единицы объёма) равна скорости изменения импульса в единице объёма, а правая часть этого уравнения равна потоку импульса, входящего в единицу объёма, за счёт действия внешних сил.

В общем случае, когда вектор скорости направлен произвольно, уравнения движения несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости (баланса сил) в проекциях на оси координат имеют вид

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{ось } z: & \rho\dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \mu\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}\right) \\
\text{ось } x: & \rho\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} - \rho g + \mu\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial z^2}\right) \\
\text{ось } y: & \rho\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} - \rho g + \mu\left(\dfrac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \upsilon_y}{\partial z^2}\right)
\end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

Эти уравнения называются системой уравнений Навье-Стокса.

Уравнение Навье-Стокса в векторной форме:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\rho g - grad\,P + \mu\Delta\vec{\upsilon} \qquad (2.4)$$

Где Δ - оператор Лапласа

Совместное решение уравнения (2.4) и уравнения неразрывности (1.14) позволяет получить поле скоростей и давлений в движущейся несжимаемой ньютоновской жидкости. Точные аналитические решения этой системы в силу её нелинейности удаётся найти только для небольшого числа простых симметричных течений.

При $\mu = 0$, уравнение Навье-Стокса переходит в уравнение Эйлера.

<u>Уравнение движения идеальной жидкости Эйлера</u>

В потоке идеальной жидкости действуют только нормальные напряжения.

Если в потоке идеальной (невязкой) жидкости, движущейся в поле сил тяжести, выделить произвольный объём V, ограниченный поверхностью S с единичной внешней нормалью n и найти сумму внешних сил, действующих на данный объём, то получим в векторной форме уравнение аналогичное (2.4), но без слагаемого, учитывающего влияние сил трения:

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\rho g - grad\,P \qquad (2.5)$$

Это уравнение называется уравнением движения идеальной жидкости Эйлера

Запишем уравнение движения Эйлера в проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{d\upsilon_x}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho\frac{d\upsilon_y}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho\frac{d\upsilon_z}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Решение этой системы осуществляется совместно с уравнением неразрывности при использовании выражений для субстанциональных производных проекций скорости. Субстанциональные производные $\frac{d\upsilon_x}{dt}, \frac{d\upsilon_y}{dt}, \frac{d\upsilon_z}{dt}$ находят по формулам типа (1.22).

Например, для проекции скорости на ось x, получим

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\partial\upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z} \qquad (2.7)$$

Для несжимаемых идеальных жидкостей решение системы уравнений (2.6) совместно с уравнением неразрывности (1.14) позволяет определить четыре неизвестных υ_x, υ_y, υ_z, P.

Равновесие в поле сил тяжести. Основное уравнение гидростатики

Уравнение (2.5) при приравнивании скорости нулю может быть преобразовано в уравнение равновесия жидкости в поле сил тяжести:

$$gradP = \rho\vec{g} \qquad (2.8)$$

Также можно рассмотреть проекции на оси координат (2.6), которые превращаются в систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho\vec{g} \end{aligned}\right\} \qquad (2.9.)$$

Так как производные давления по x и y равны нулю, для несжимаемой жидкости получим

$$d(P+\rho gz)=0$$

Отсюда получим *основное уравнение гидростатики*

$$P+\rho gz=const \qquad (2.10)$$

или в другой форме

$$\frac{P}{\rho g}+z=const \qquad (2.11)$$

Запишем уравнение (2.10) для ряда сечений покоящейся жидкости

$$P_0+\rho gz_0=P_1+\rho gz_1=\ldots=P_i+\rho gz_i \qquad (2.12)$$

или $$\frac{P_0}{\rho g}+z_0=\frac{P_1}{\rho g}+z_1=\ldots=\frac{P_i}{\rho g}+z_i \qquad (2.13)$$

Все составляющие уравнения (2.12) имеют размерность давления [Па], все составляющие уравнения (2.13) имеют размерность длины [м].

Уравнение (2.10) носит название закона Паскаля: давление, создаваемое в любой точке покоящейся жидкости, передается во все стороны равномерно.

Основное уравнение гидростатики служит для определения величин давления, положений раздела фаз в покоящихся жидкостях, а также для определения сил, действующих на дно и стенки аппаратов.

Примеры практического приложения основного закона гидростатики

1. Приборы для измерения невысоких избыточных давлений - дифференциальные манометры (дифманометры)

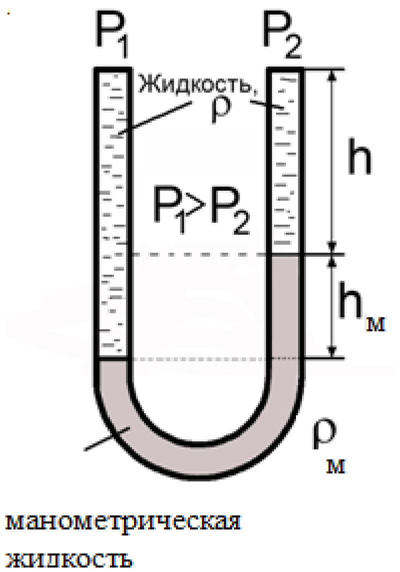

Рис.2.2. U-образный дифманометр

Простейший U-образный дифманометр представляет собой прибор в виде прозрачной трубки, заполненной манометрической жидкостью.

Манометр присоединён к аппарату, содержащему жидкость, плотность которой ρ ниже по сравнению с плотностью манометрической жидкости $\rho_м$.

Уровни жидкости в U-образной трубке до начала измерений одинаковы. При появлении перепада давления в аппарате уровни манометрической жидкости приходят в движение, и затем устанавливается новое положение: слева давление выше, поэтому уровень манометрической жидкости ниже, в правом колене наоборот – уровень выше, давление ниже (Рис 2.2). Запишем значения давлений на левом уровне и правом уровне манометрической жидкости, применяя уравнение гидростатики (2.12) к рабочей и манометрической жидкостям:

$$P_{лев} = P_1 + \rho g(h + h_м)$$

$$P_{прав} = P_2 + \rho gh$$

$$P_{лев} = P_{прав} + \rho_м g\, h_м$$

Получаем выражение для определения перепада давления через показания U-образного дифманометра $h_м$:

$$P_1 - P_2 = (\rho_м - \rho)gh_м \tag{2.14}$$

При использовании U-образного дифманометра для газовых сред можно пренебречь значениями ρ из-за малых значений плотности газов. Тогда уравнение (2.14) приобретает вид:

$$P_1 - P_2 = \rho_м g h_м \tag{2.15}$$

2. Сообщающиеся сосуды.

Из уравнения (2.12) также следует правило сообщающихся сосудов: в открытых или закрытых, находящихся под одинаковым давлением, сообщающихся сосудах, заполненных однородной жидкостью, уровни ее располагаются на одной высоте независимо от формы и поперечного сечения сосудов.

Примером использования этого правила в практических целях является применения прибора для измерения уровня в закрытых сосудах, называемого «водомерным стеклом».

3. Гидравлический пресс.

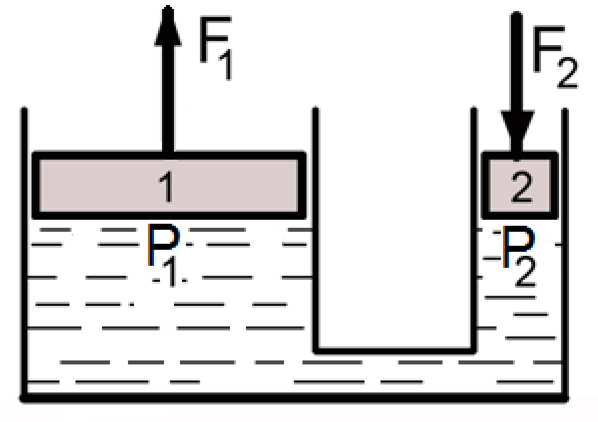

Рис.2.3. Схема гидравлического пресса

Если приложить относительно небольшое усилие F_2 к поршню 2, движущемуся в цилиндре меньшего диаметра d_2, то в жидкости создается давление P_2, которое передается на поршень 1 в цилиндре большего диаметра d_1. Величину этого давления можно рассчитать:

$$P_2 = \frac{F_2}{\pi d_2^2/4} \qquad P_1 = \frac{F_1}{\pi d_1^2/4}$$

Согласно уравнению гидростатики $P_1 = P_2$.

Тогда $\dfrac{F_1}{F_2} = \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$

В результате поршень в цилиндре большего диаметра передаст силу давления, во столько раз большую, чем сила, приложенная к поршню в цилиндре меньшего диаметра, во сколько раз поперечное сечение цилиндра 1 больше, чем цилиндра 2.

4. Сила давления на плоскую стенку (на дно сосуда или по длине тела, погруженного в жидкость) (Рис.2.4)

Давление на горизонтальное дно в любой точке не зависит от формы сосуда, а определяется только высотой столба жидкости в нем.

$P = P_0 + \rho g H$, H - высота столба жидкости.

Сила давления на дно определяется как $F = PS = (P_0 + \rho g H)S$, где S - площадь горизонтального днища.

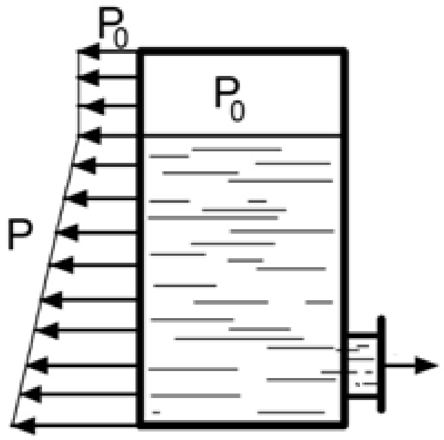

Рис.2.4. Эпюра давления жидкости

Давление на стенки сосуда изменяется по высоте линейно и определяется высотой столба жидкости над точкой замера давления.